



TITLE:

Undesirable Outputを含むDMUの DEA効率性評価法 (不確実性科学と 意思決定の数理と応用)

AUTHOR(S):

山本, 哲也; 中井, 達

CITATION:

山本, 哲也 ...[et al]. Undesirable Outputを含むDMUのDEA効率性評価法 (不確実性科学と意思決定の数理と応用). 数理解析研究所講究録 2005, 1457: 224-232

ISSUE DATE:

2005-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47880>

RIGHT:

Undesirable Output を含む DMU の DEA 効率性評価法

山本 哲也 九州大学大学院経済学府
(Graduate School of Economics, Kyushu University)

中井 達 九州大学経済学研究院
(Faculty of Economics, Kyushu University)

概要

二酸化炭素のような undesirable output はしばしば desirable output の副産物として生産（排出）される。本稿では、DEA を用いて undesirable output を含む DMU の効率評価法について考察する。環境系の論文で多く用いられている、距離関数の修正による評価法の欠点を指摘し、CCR 比率モデルにおける undesirable output の乗数（multiplier）を非正（non-positive）にする修正より undesirable output を扱う NPM アプローチを提唱する。

1.1 序論

Data Envelopment Analysis; DEA とは特定の生産関数を仮定せずに意志決定機関（DMU; Decision Making Unit）の相対的な効率性を評価するモデルである。そして、一度効率的フロンティアが決定されると、DEA モデルは非効率な DMU に対して射影（projection）と呼ばれるパフォーマンス改善案を提示する。

しかし二酸化炭素、 CO_2 など、少ない方がよいとされる項目（item）も生産活動における output である。そこで、本稿ではこのような望ましくない出力（undesirable output）を含んだ DMU の効率評価法について考察する。

DEA では観測されたデータをそのまま使い、多入力、多出力に対応している。DMU は n 個存在し、第 j 番目の DMU を $DMU_j, j = 1, \dots, n$ とする。また、評価の対象となる DMU を DMU_o と表す。 DMU_j の m 種類の input データを $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})^T$ 、 s 種類の output データを $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})^T$ とする。さらに、データ行列を $X = (x_1, \dots, x_n)$ 、 $Y = (y_1, \dots, y_n)$ と表す。ただし T は転置を示す。

DEA に限らず、undesirable output を扱う伝統的な効率評価法は、undesirable output の項目を無視するというものである。しかし、近年環境問題が注

目され、 CO_2 排出量なども効率評価において無視できなくなっている。そこで本稿では、undesirable output を扱う DEA 効率評価についてラディアル測定 (radial measure) モデルと (有向) 距離関数 ((direct) distance function) を使用して考察するため、2 章、3 章ではそれらを紹介する。4 章で undesirable output を含む DMU の効率評価について考察し、従来から用いられているアプローチの疑問点を提起し、新たなアプローチとして NPM アプローチを提唱する。5 章では実際に地方自治体の一般廃棄物処理サービスを NPM アプローチを用いて評価する。さらに、この数値例において desirable、undesirable のどちらにも属さない性質を持つ項目について議論する。

1.2 生産可能性集合の仮定

生産可能性集合 P について次のように仮定する。

- A.1 観測されたアクティビティ $(x_j, y_j), j = 1, \dots, n$ は P に属する。
- A.2 P に属するアクティビティ (x, y) に対して、 $x' \geq x, y' \leq y$ となる任意の正のアクティビティ (x', y') は P に含まれる。（input と output に対する強ディスポーサビリティの仮定）
- A.3 P に含まれる任意のアクティビティの線形結合は P に属する。（linear technology の仮定）

A.2 と A.3 の状態を図 1 に表す。図は input を 1 に固定（基準化）した、1 input, 2 output の場合である。観測された DMU_A よりも少ない output (y_1, y_2) は生産可能性集合に属するので、 $P_1 + P_2$ は生産可能である。同様に DMU_B に注目すれば $P_2 + P_3$ も生産可能である。さらに、 DMU_A と DMU_B の線形結合も生産可能であるから P_4 も生産可能である。したがって、 DMU_A と DMU_B が観測された場合の生産可能性集合は $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ となる。

2.1 CCR モデル

CCR 比率モデルは次の制約式を満足し、目的関数を最大にするウェイトを決定する。

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{u_1 y_{1o} + \cdots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + \cdots + v_m x_{mo}} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{u_1 y_{1j} + \cdots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + \cdots + v_m x_{mj}} \leq 1, j = 1, \dots, n \\ & u_r, v_i \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

この式を変形することにより次の入力指向の包絡型が求められる^{*1}。

$$[\text{Phase I}] \quad \min \quad \theta \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \quad \theta x_o - X\lambda \geq 0 \quad (3)$$

$$Y\lambda \geq y_o \quad (4)$$

$$\lambda \geq 0$$

$$[\text{Phase II}] \quad \max \quad es_x + es_y \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \theta^* x_o - X\lambda' - s_x = 0$$

$$Y\lambda' - s_y = 0$$

$$\lambda', s_x, s_y \geq 0$$

ただし、 θ^* は [Phase I] で得られた最適解を意味する。また、 e はすべての要素が 1 のベクトルを示し、 s_x, s_y はそれぞれ input, output に対応するスラック変数である。[Phase I] の λ と [Phase II] の λ' は共にデータの線形結合を示す変数である。

■CCR 効率性

上の二つの問題の最適解、 (θ^*, s_x^*, s_y^*) が、 $\theta^* = 1$ かつ $s_x^* = s_y^* = 0$ を満たすならば、 DMU_o は CCR 効率である。

^{*1} Cooper et al. [1] 参照

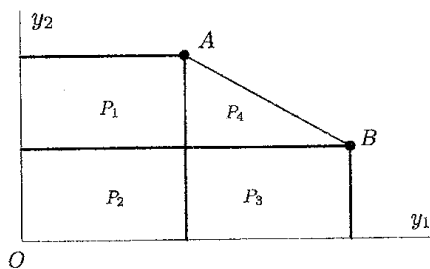


図1 y 上の生産可能性集合

別の変形により次の出力指向包絡型が作られる。

$$[\text{Phase I}] \quad \max \quad \phi \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad \phi y_o - Y\mu \leq 0$$

$$X\mu \leq x_o$$

$$\mu \geq 0$$

$$[\text{Phase II}] \quad \max \quad es_x + es_y \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \quad \phi^* y_o - Y\mu' + s_y = 0$$

$$X\mu' + s_x = 0$$

$$\mu', s_x, s_y \geq 0$$

■出力指向 CCR 効率性

上の二つの最適解 (ϕ^*, s_x^*, s_y^*) が、 $\phi^* = 1, s_x = s_y = 0$ を満たすなら、 DMU_o は (出力指向) CCR 効率であるという。

2.2 BCC モデル

CCR モデルの制約式に $e\lambda = 1$ または $e\mu = 1$ を加えたものを BCC モデルと呼ぶ。CCR モデルとの違いは規模に関する収穫の仮定で、CCR モデルは規模に関して収穫一定 (CRS)、BCC モデルは規模に関して収穫可変 (VRS) を仮定している。

2.3 射影

非効率と判断された DMU_o は射影 (projection) と呼ばれる次の改善のための式を持つ。

$$\text{入力指向} \quad \hat{x}_o = \theta^* x_o - s_x^* \quad (8)$$

$$\hat{y}_o = y_o + s_y^* \quad (9)$$

$$\text{出力指向} \quad \hat{x}_o = x_o - s_x^* \quad (10)$$

$$\hat{y}_o = \phi^* y_o + s_y^* \quad (11)$$

改善された (\hat{x}_o, \hat{y}_o) は効率である。

3.1 距離関数

距離関数は次のように表される。

$$D_i(y, x) = \sup_{\psi} \left\{ \psi \mid \frac{x}{\psi} \in L(y) \right\} \quad (12)$$

$$D_o(x, y) = \inf_{\psi} \left\{ \psi \mid \frac{y}{\psi} \in P(x) \right\} \quad (13)$$

ただし、 $L(y)$ や $P(x)$ はそれぞれ、output y の水準を生産可能な input x の集合、input x で生産可能な output y の集合を表す。 $L(y)$ や $P(x)$ の特別な場合として (14)、(15) 式で表される linear technology^{*2} と仮定すると、 $D_i(y, x)$ や $D_o(x, y)$ はそれぞれ入

^{*2} Färe et al. [2] 参照

力指向 CCR モデル、出力指向 CCR モデルと等しくなる。

$$L(y) = \{x \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda\} \quad (14)$$

$$P(x) = \{y \mid y \leq Y\lambda, x \geq X\lambda\} \quad (15)$$

4.1 Undesirable Output

Output y を desirable output y^g と undesirable output y^b に分け、 $y = (y^g, y^b)^T$ と表す。Undesirable output を扱うアプローチには直接的アプローチ (direct approach) と間接的アプローチ (indirect approach) がある^{*3}。直接的アプローチである undesirable output を扱うために距離関数を用いるアプローチは undesirable output を弱ディスパーサビリティと仮定することで生産可能性集合を次のように再定義 (修正) し、次の目的関数を用いて DMU の効率性を評価する^{*4}。

$$P^w(x) = \{(y^g, y^b) \mid y^g \leq Y^g\lambda, y^b = Y^b\lambda, x \geq X\lambda\}$$

$$H_O^A(y^g, y^b, x) = \max \left\{ \psi \mid \left(\psi y^g, \frac{y^b}{\psi} \right) \in P^w(x) \right\}$$

上の生産可能性集合と目的関数を図 2 に示す。図 2 の矢印はそれぞれ点 D, E を評価する距離関数 (目的関数) の動きを示す。 $H_O^A(\cdot) = 1$ ならば、desirable output を増加出来ないため、効率的であると考えられる。

距離関数を用いるアプローチには欠点があり、それは生産可能性集合の仮定そのものである。距離関数を用いる多くの論文では $P^w(x)$ を用いるため、図 2 の線分 $OBCDEF$ 囲まれた領域 $P^w(x)$ が生産可能性集合であり、線分 $OBCDE$ が効率的フロンティアとなる。したがって、図の太線部分は等価であり、点 C, D, E はそれぞれ効率的であると評価される。しかし、点 C は点 D, E より desirable output y^g が大きく、undesirable output y^b が少ないので、明らかに点 D, E に比べて効率的である。また、点 E のように、フロンティア上にある点が、非効率と判断されたり、点 D のように、仮に距離関数による評価は効率的であっても、実際にはさらに効率的な DMU が存在する場合がある^{*5}。

また、間接的アプローチには additive inverse^{*6} と呼ばれるデータ変換、 $f(y^b) = -y^b$ を持ちいたのち、

通常の DEA モデルで評価を行うアプローチがあり、次のように定式化される (出力指向 BCC モデルを用いる)。

$$\begin{aligned} \max \quad & \phi \\ \text{s.t.} \quad & x\mu \leq x_o \\ & (-Y^b)\mu \geq \phi(-y_o) \\ & Y^g\mu \geq \phi y_o \\ & e\mu = 1, \quad \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

DEA の利点は観測された元のデータを直接使い、データの加工 (ウェイトの計算等) はモデルが行うことであるからデータ変換は好ましくない。

4.2 NPM アプローチ

距離関数を用いるアプローチは生産可能性集合の仮定 (修正) が問題であり、データ変換は妥当性に欠ける。そこで、ラディアル測定である CCR 比率モデルを基礎として制約条件の修正を行い、距離関数を用いるアプローチの持つ生産可能性集合の問題点を解決する Non-Positive Multiplier; NPM アプローチを提案する。このアプローチは desirable output と undesirable output を等比率に増加出来る度合いを測るモデルであり、Korhonen *et al.* [4] を原典とする。

多くの環境系の論文では、いかに undesirable output を削除するかという点に焦点を当てているために、desirable output の増加と undesirable output の減少を同時に行うことが可能なモデル、距離関数が使用される。一方で、出力指向 NPM アプローチでは産業活動の基本である出力の最大化に焦点を当てる。つまり、所与の input で実行可能な最大の desirable output を生産することが出来るなら、undesirable output も観測された水準よりも増加してもかまわないとする。その上で同水準の input、desirable output を持つならば、undesirable output が

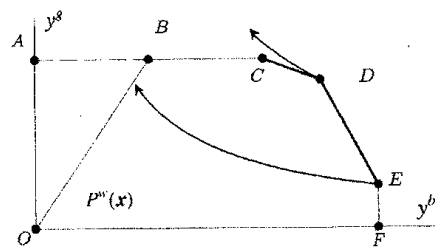


図 2 undesirable output を扱う distance function

^{*3} Scheel [5] 参照

^{*4} Färe *et al.* [3] 参照。 H_O^A は desirable output の増加と undesirable output の減少を同時に扱う距離関数である。

^{*5} 山本 [7] 参照

^{*6} Scheel [5] 参照

少ない方がより効率であると評価する。Desirable output と undesirable output の比率（例えば、電力会社における発電量単位あたりの CO_2 等の発生量）を保ったまま改善できる点から、undesirable output の増加は NPM アプローチの欠点ではなく性質であると考えられる。

NPM アプローチは (1) 式の undesirable output にかかる乗数を非正 (non-positive) にすることから始める (行列表記を用いる)。

$$\max \frac{u^g y_o^g + u^b y_o^b}{v x_o} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \frac{u^g y_j^g + u^b y_j^b}{v x_j} \leq 1, j = 1, \dots, n \\ & v, u^g \geq 0, u^b \leq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、分子が負になることは好ましくないので、観測されたデータのうち desirable output は少なくとも一つは正であると仮定する ($y^g \geq 0, y^g \neq 0$)。上の問題は容易に次の分数計画問題に書き換えることができる。

$$\max \frac{u^g y_o^g - u^b y_o^b}{v x_o} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \frac{u^g y_j^g - u^b y_j^b}{v x_j} \leq 1, j = 1, \dots, n \\ & v, u^g, u^b \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

変数の非負制約より、通常の CCR モデルと同様に変形できる。

$$[\text{Phase I}] \quad \min \theta \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\ & Y^g \lambda \geq y_o^g \\ & Y^b \lambda \leq y_o^b \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$$[\text{Phase II}] \quad \max \quad es_x + es_y^g + es_y^b \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \theta^* x_o - X\lambda' - s_x = 0 \\ & Y^g \lambda' - s_y^g = y_o^g \\ & Y^b \lambda' + s_y^b = y_o^b \\ & \lambda', s_x, s_y^g, s_y^b \geq 0 \end{aligned}$$

また、出力指向モデルの包絡型は次の線型計画問題

で表される。

$$[\text{Phase I}] \quad \max \phi \quad (23)$$

$$\text{s.t.} \quad \phi y_o^g - Y^g \lambda \leq 0 \quad (24)$$

$$-\phi y_o^b + Y^b \lambda \leq 0 \quad (25)$$

$$X\lambda \leq x_o$$

$$\lambda \geq 0$$

$$[\text{Phase II}] \quad \max \quad es_x + es_y^g + es_y^b \quad (26)$$

$$\text{s.t.} \quad \phi^* y_o^g - Y^g \lambda' + s_y^g = 0$$

$$-\phi^* y_o^b + Y^b \lambda' + s_y^b = 0$$

$$X\lambda' + s_x = x_o$$

$$\lambda', s_x, s_y^g, s_y^b \geq 0$$

(23) 式に BCC モデルの制約式 $e\mu = 1$ を加えたものは additive inverse (16) 式と等しい。(24) 式、(25) 式の生産可能性集合を図示したものが図 3 である*7。

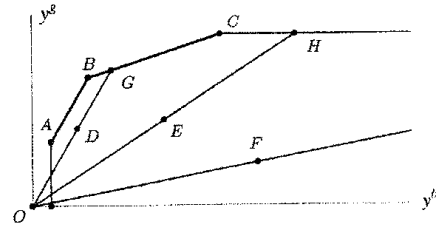


図 3 NPM Approach の生産可能性集合

■効率性

NPM アプローチの最適解 ($\theta^*, s_x^*, s_y^{g*}, s_y^{b*}$) または ($\phi^*, s_x^*, s_y^{g*}, s_y^{b*}$) が $s_x^* = s_y^{g*} = s_y^{b*} = 0$ 、かつ $\theta^* = 1$ または $\phi^* = 1$ を満たすならば DMU_o は効率的である。

4.3 NPM アプローチの射影

通常の CCR モデルと同様に、次の射影を持ち、改善された DMU_o ($\hat{x}_o, \hat{y}_o^g, \hat{y}_o^b$) は効率的である。

$$\text{入力指向} \quad \hat{x}_o = \theta^* x_o - s_x^*$$

$$\hat{y}_o^g = y_o^g + s_y^{g*}$$

$$\hat{y}_o^b = y_o^b - s_y^{b*}$$

$$\text{出力指向} \quad \hat{x}_o = x_o - s_x^* \quad (27)$$

$$\hat{y}_o^g = \phi^* y_o^g + s_y^{g*}$$

$$\hat{y}_o^b = \phi^* y_o^b - s_y^{b*}$$

*7 1 input, 1 desirable output, 1 undesirable output の場合で、input は 1 で固定

証明. 出力指向で証明する。 $(\hat{x}, \hat{y}_o^g, \hat{y}_o^b)$ の効率性を評価するために、次の $[LPO_e]$ を解く。

$$[LPO_e] \quad \max \quad \phi \quad (28)$$

$$\text{s.t.} \quad \phi \hat{y}_o^g - Y^g \mu + s_y^g = 0$$

$$\phi \hat{y}_o^b - Y^b \mu - s_y^b = 0$$

$$X\mu + s_x = \hat{x}_o$$

$$\mu, s_y^g, s_y^b, s_x \geq 0 \quad (29)$$

$[LPO_e]$ の最適解を $(\hat{\phi}, \hat{\mu}, \hat{s}_y^g, \hat{s}_y^b, \hat{s}_x)$ とおくと、これらの最適解は次の式を満足する。

$$\hat{\phi} \hat{y}_o^g - Y^g \hat{\mu} + \hat{s}_y^g = 0$$

$$\hat{\phi} \hat{y}_o^b - Y^b \hat{\mu} - \hat{s}_y^b = 0$$

$$X\hat{\mu} + \hat{s}_x = \hat{x}_o$$

この式に (27) 式を代入すると、 $[LPO_e]$ の最適解は次の式を満たす。

$$\hat{\phi} \hat{\phi}^* y_o^g - Y^g \hat{\mu} + \hat{\phi} s_y^{g*} + \hat{s}_y^g = 0$$

$$\hat{\phi} \hat{\phi}^* y_o^b - Y^b \hat{\mu} - \hat{\phi} s_y^{b*} - \hat{s}_y^b = 0$$

$$X\hat{\mu} + \hat{s}_x + s_x^* = x_o$$

これは $\tilde{\phi} = \hat{\phi} \hat{\phi}^*$, $\tilde{s}_y^g = \hat{\phi} s_y^{g*} + \hat{s}_y^g$, $\tilde{s}_y^b = \hat{\phi} s_y^{b*} + \hat{s}_y^b$, $\tilde{s}_x = \hat{s}_x + s_x^*$ と置くことで、

$$\tilde{\phi} y_o^g = Y^g \mu - \tilde{s}_y^g \quad (30)$$

$$\tilde{\phi} y_o^b = Y^b \mu + \tilde{s}_y^b \quad (31)$$

$$x_o = X\mu + \tilde{s}_x \quad (32)$$

表すことが出来る。しかし、(30)-(32) 式のデータは元の観測された (x_o, y_o) であり、 $\hat{\phi}^*$ はそれらを用いた問題の最適解であるので、 $\tilde{\phi} = \hat{\phi}^*$ つまり $\hat{\phi} = 1$ としなければならない。また、 s_y^{g*} , s_y^{b*} , s_x^* はスラック最大化問題の最適解であるから、

$$es_y^g + es_y^b + es_x \leq es_y^{g*} + es_y^{b*} + es_x^* \quad (33)$$

となる。したがって、

$$(es_y^g + \hat{\phi} es_y^{g*}) + (es_y^b + \hat{\phi} es_y^{b*}) + (es_x + es_x^*) \leq es_y^{g*} + es_y^{b*} + es_x^* \quad (34)$$

より、 $\hat{\phi} = 1$ と (29) 式の関係を用いれば $\hat{s}_x = s_x^g = s_y^b = 0$ となるので、改善されたアクティビティ $(\hat{x}_o, \hat{y}_o^g, \hat{y}_o^b)$ は効率である。入力指向も同様に証明される。□

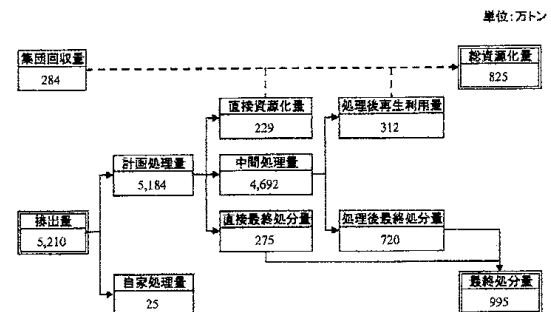
4.4 図形的理解

図3を用いて出力指向NPMアプローチの生産可能性集合と射影の図形的理解を試みる。

制約式から、生産可能性集合は原点と点A、B、Cを結んだ線分と、点Cから水平に、undesirable output軸方向に延びる半直線で囲まれた右下部分である。また、効率のフロンティアは原点と点A、B、Cを結んだ線分であり、太線で表す。(25)式より、undesirable outputは上限無く生産可能であることを意味する。しかし、desirable outputが少しでも存在すると仮定したため、図におけるDMUと原点とを結ぶ直線の傾きは正である。したがって、点Fと原点を結ぶ直線は、点Cから水平に延びる直線と必ず交わる。その後、[Phase II]のスラック最大化問題で点Cへの改善案が提案される。したがって、点Fは点Cへと投影される。

5.1 数値例

平成13年度における地方自治体の一般廃棄物処理のサービスをリサイクルに注目して効率評価を行う。データは環境省-廃棄物・リサイクル対策室-廃棄物処理技術情報^{*8}を元に作成し、9ページの表4に表す。以降の表において単位は表4に準じる。詳細な評価結果は山本[7]を参照のこと。ゴミ処理状況のフローを図4に示す^{*9}。中間処理量からでる



出所) 環境省 廃棄物・リサイクル対策室 廃棄物処理技術情報
http://www.env.go.jp/recycle/waste_tech/index.html より筆者作成

図4 平成13年度における一般廃棄物処理のフロー図

矢印の量が一致しないのは、生ゴミの焼却等で水分が無くなるなど、中間処理によってゴミの減量が必要だからである。本稿ではリサイクルの観点から、desirable outputには総資源化量を、undesirable

^{*8} http://www.env.go.jp/recycle/waste_tech/index.html

^{*9} 数値は全国の合計。

output には最終処分量を用いる。また、input には排出量と集団回収量、総費用を用い、VRS を仮定する出力指向 BCC モデルを使用する。

5.1.1 Undesirable output を無視した場合との比較

Undesirable output を無視した場合に比べ佐賀県などがより効率になる。効率値を比較し、変化のある地方自治体のみを表 1 に表す。この状態を説明す

表 1 Undesirable output を無視した場合との比較

DMU	最終処分量を 無視した効率値	最終処分量を 含んだ効率値
栃木県	1.178	1.117
埼玉県	1.026	1.010
富山県	1.102	1.096
山梨県	1.232	1.201
佐賀県	1.028	1

るために図 5 と図 6 を用いて、2 desirable output, 1 undesirable output に拡張した場合を考える。

Desirable output として y_1, y_2 を、undesirable output として y^b を用いた場合の生産可能性集合の境界（フロンティア）を図示している。図 3 から分かるように、効率的フロンティアは曲線 AB より下側（原点側）の部分であり、生産可能性集合の y_1 - y_2 平面と垂直な曲面は無限大まで延びる。

Undesirable output を無視した場合は全ての点を y_1 - y_2 平面上に投影できるので、同一の undesirable output を生産する無差別曲線を表すことが出来る。図 6 は効率的フロンティア上の最も大きい undesir-

able output を生産する無差別曲線と、それ以下の任意の undesirable output を生産する無差別曲線を y_1 - y_2 平面上に投影したものである。

図 6 上の点 X は undesirable output を含む評価では無差別曲線上にあるから効率であった。しかし、undesirable output を無視した場合、つまり output が y_1, y_2 のみの場合の評価では無差別曲線が取り除かれ、生産可能性集合が点 $APQRB$ に囲まれた領域となるので点 X は非効率となる。佐賀県はこの点 X の状態にあると考えられる。 s desirable output, l undesirable output の場合に拡張可能である。

これが undesirable output を扱う DEA 効率評価の特徴であり、desirable output は少ないものの、相対的に undesirable output が少ない DMU を正しく評価するという利点がある。

5.1.2 ゴミの分別数の組込

次に、ゴミの分別数を組み込むことを考える。ゴミの分別数が多ければ、分別作業が必要であるうえ、ゴミの回収日まで分別した状態で家屋等にて保持しなければならない。したがってゴミの分別数をコストと捉え、input として効率評価に組み込む。ここではゴミの分別数とは地方自治体の住民一人あたりの分別数とする。

注目すべきは愛知県の結果（表 2）である。ここで、改善量とは（27）式で表された射影された点と元の点の差を意味する。 $\Delta x = \hat{x} - x$, $\Delta y^s = \hat{y}^s - y^s$, $\Delta y^b = \hat{y}^b - y^b$ と表され、これらの値が負であれば、減少させなければならない量を示す。

愛知県の改善量は費用とゴミの分別数が非常に多

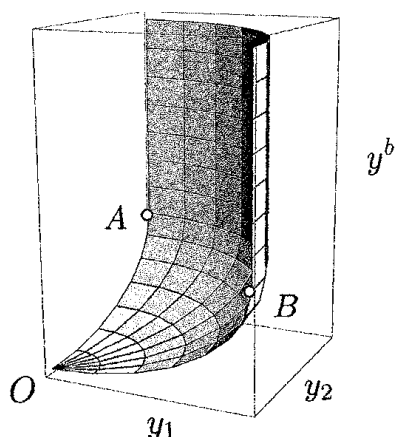


図 5 1 input, 2 desirable output, 1 undesirable output の例

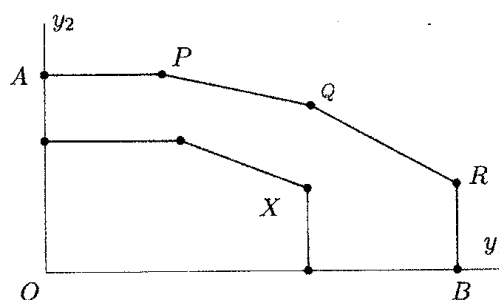


図 6 undesirable output を無視した場合の無差別曲線

表2 愛知県の改善量

DMU	効率値	費用の改善量	ゴミの分別数の改善量	最終処分量の改善量
愛知県	1.043	-12279	-11.807	-87

い一方で再資源化量が少ない。これはゴミの分別によって費用がかかりすぎていることを意味し、愛知県のゴミの多分別化は効果が薄いと考えられる^{*10}。

また、BCCモデルは最も少ないinputや、最も多いoutputを持つDMUを必ず効率的であると判断する性質があるため、一人あたりの分別数が最も少ない大阪府は効率的である。このようなBCCモデルの性質と、分別数をinputと定義したことにより、最終処分量の改善量における特異点が瀬戸内海沿いの地域に多く見られ、分別数をinputに含めた場合と含めない場合の比較を表3に表す。

ゴミの分別を含まない評価において、これらの地方自治体は非効率であり、最終処分量の改善量がマイナス、つまり最終処分量の減少を指示されている。特に京都府、大阪府、広島県は最終処分量が多いため非効率であることがわかる。これはゴミの分別数が少ないため、再資源化できるにもかかわらず、(焼却等の処分を経て)最終処分されている廃棄物が多いと考えることが出来る。一方で分別数を含む評価ではinputである分別数が少ない故に効率と判断される。

このように、分別数の定義そのものに問題があり、適切な分別数を算出できない。分別数のように、増える方がよいのか、減る方がよいのかを明確に判断できない性質を持つ項目については、DEAモデルに組み込むことは難しい。このようなinput(item)をindefinable input(item)と呼ぶ。

6 終わりに

本稿ではundesirable outputを扱うDEAモデルについて考察した。従来から用いられている距離関数の修正するアプローチにおける生産可能性集合の問題点を提起し、自らの回答として直接的アプローチであるNPMアプローチを提唱した。

NPMアプローチも生産可能性集合が問題を持ち、有限のinputから無限のundesirable outputが生産

可能であるという状態を仮定していることに考慮しなければならない。しかし、少なくとも一つはdesirable outputを持つとする仮定よりこの問題を回避できる。また、desirable outputとundesirable outputを同時に増加させる射影を持つ場合があるが、欠点ではなく性質であると判断する。

NPMアプローチは式変形を行う仮定で間接的アプローチであるadditive inverseと等しくなるので、NPMアプローチは直接的アプローチと間接的アプローチの中間的なモデルと捉えることが出来る。また、これらの射影について考察し、undesirable outputを含めたときの効果を確認した。

しかし、数値例を通じて、ゴミの分別数のように多い方がよいのか、少ない方がよいのか判断できないindefinable itemをDEAモデルにどのように組み込めばよいのかという課題が残る。Indefinable inputは意志決定者が制御可能であり、DMUの効率性に影響を及ぼす変数である。しかし、通常のinputやundesirable input^{*11}と異なり、改善の方向性(増加または減少)が定まっていない。CCRモデルは最も優れた比率を持つDMUを効率的と判断するため、単純にindefinable inputが少ないという理由だけでは効率的にならない。しかし、indefinable inputを扱うときは常に規模に関して収穫一定を仮定しなければならない、さらに射影は常に減少を示すため^{*12}、根本的な解決とは言えない。

また、DMU₀から最も遠い効率的フロンティア上の点に達するinputの超過とoutputの不足を同時に考える無指向モデルである加法モデル^{*13}の修正を考える。Indefinable inputに対応するスラック変数の非負制約をはずしたり、目的関数をL₂ metricに修正したりすれば良いのではないかと。しかし、VRSの性質により、最もindefinable inputの値が小さいために効率であると判断されるという問題点は解決されない。

^{*11} ここでは多いほど良いとするinputを意味する。通常のinputと反対の改善(増加)を示す。

^{*12} [Phase II]のスラックの非負条件を緩めることで増加を示す射影も可能かもしれない。

^{*13} 最も基本的な加法モデルは次のように表される。 $e\lambda = 1$ を制約式に加えることでVRSにも対応できる。

$$\begin{aligned}
 \max \quad & es_x + es_y \\
 \text{s.t.} \quad & x_0 - X\lambda - s_x = 0 \\
 & y_0 - Y\lambda + s_y = 0 \\
 & \lambda, s_x, s_y \geq 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

^{*10} すでに、少ない分別数で同程度の再資源化量を生産している地方自治体が存在していることがDEAの利点である。

Indefinable item を扱う DEA 効率評価の問題は、どのように効率的フロンティアを決定するかという問題に帰着する。また、どの程度改善しなければならないかを示す射影を算出できるかどうかも重要である。Indefinable item を扱うモデルについて、等比率の増減を求めるラディアル測定では最大化もしくは最小化という目的を効率評価者が任意に決定するため困難である。そこで、加法モデル（及びその拡張モデル）を修正することで可能であると思われる、これらが今後の課題である。

参考文献

- [1] William W. Cooper, Lawrence M. Seiford, and Kaoru Tone. *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [2] Rolf Färe, Shawna Grosskopf, and C. A. Knox Lovell. *The Measurement of Efficiency of Production*. Kluwer-Nijhoff Publishing, 1985.
- [3] Rolf Färe, Shawna Grosskopf, C.A.Knox Lovell, and C. Pasurka. Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: a nonparametric approach. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 71, pp. 90–98, 1989.
- [4] Pekka J. Korhonen and Mikulas Luptacik. Eco-efficiency analysis of power plants: An extension of data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, Vol. 154, No. 2, pp. 437–446, 2004.
- [5] Holger Scheel. Undesirable outputs in efficiency valuations. *European Journal of Operational Research*, Vol. 132, pp. 400–410, 2001.
- [6] 末吉俊幸. 経営科学のニューフロンティア 10 DEA-経営効率分析法-. 朝倉書店, 2001.
- [7] 山本哲也. Undesirable Output を扱う DEA 効率評価-リサイクルに注目した地方自治体の一般廃棄物処理の効率評価-. 修士論文, 九州大学大学院経済学府, 2005.

表3 分別数を含めた場合の比較

DMU	分別数	分別数を含む		分別数を含まない	
		効率値	改善量	効率値	改善量
北海道	6.979	1.312	-832	1.440	-850
青森県	10.142	1.795	-125	1.872	-129
岩手県	9.214	1.312	2	1.337	4
宮城県	9.856	1.015	-35	1.204	-15
秋田県	8.245	1.000	0	1.079	-3
山形県	7.846	1.000	0	1.000	0
福島県	11.930	1.461	-22	1.548	-19
茨城県	9.611	1.000	0	1.108	2
栃木県	9.759	1.000	0	1.177	16
群馬県	9.283	1.305	-20	1.427	-17
埼玉県	10.400	1.010	3	1.010	3
千葉県	6.201	1.000	0	1.000	0
東京都	8.986	1.000	0	1.000	0
神奈川県	8.853	1.000	0	1.000	0
新潟県	11.352	1.115	16	1.207	-35
富山県	10.949	1.096	6	1.096	6
石川県	13.259	1.662	-32	1.662	-32
福井県	8.818	1.000	0	1.000	0
山梨県	12.074	1.201	9	1.201	9
長野県	14.911	1.000	0	1.000	0
岐阜県	11.506	1.000	0	1.000	0
静岡県	13.450	1.000	0	1.000	0
愛知県	18.325	1.043	-87	1.043	-87
三重県	11.250	1.113	-72	1.192	-75
滋賀県	9.042	1.257	-6	1.275	-5
京都府	6.997	2.274	61	2.566	-127
大阪府	5.629	1.000	0	1.801	-145
兵庫県	7.044	1.345	-307	1.368	-299
奈良県	7.563	1.423	-2	1.499	3
和歌山県	7.443	1.000	0	1.287	9
鳥取県	8.419	1.000	0	1.000	0
島根県	7.739	1.000	0	1.000	0
岡山県	11.901	1.311	-17	1.323	-16
広島県	6.735	1.000	0	1.126	-205
山口県	8.821	1.047	-38	1.322	-62
徳島県	8.254	1.222	-2	1.222	-2
香川県	10.219	1.000	0	1.000	0
愛媛県	7.042	1.000	0	1.567	-48
高知県	12.431	1.000	0	1.000	0
福岡県	7.711	1.537	11	1.623	-11
佐賀県	9.850	1.000	0	1.000	0
長崎県	10.066	1.825	-18	1.873	-17
熊本県	13.173	1.328	-34	1.328	-34
大分県	7.766	1.146	-6	1.398	-17
宮崎県	9.093	1.000	0	1.000	0
鹿児島県	10.188	1.113	-102	1.141	-103
沖縄県	7.861	1.000	0	1.000	0
平均	9.664	1.176	-35	1.262	-49

注) 改善量は最終処分量の改善量を表す。

表4 地方自治体のデータ

DMU	費用 (百万)	ゴミ搬入量 (千トン)	一人あたりの ゴミの分別数	集団回収量 (千トン)	再資源化量 (千トン)	最終処分量 (千トン)
北海道	125,863	2,739	6.979	110	303	1,257
青森県	45,217	670	10.142	14	61	214
岩手県	30,900	479	9.214	22	76	73
宮城県	41,175	969	9.856	53	171	145
秋田県	33,007	463	8.245	9	82	79
山形県	22,747	407	7.846	34	83	67
福島県	39,317	814	11.930	39	118	132
茨城県	60,674	1,084	9.611	47	211	156
栃木県	40,998	741	9.759	30	140	88
群馬県	40,668	804	9.283	49	128	132
埼玉県	149,731	2,567	10.400	153	501	334
千葉県	126,578	2,297	6.201	173	529	271
東京都	354,802	5,239	8.986	280	963	1,010
神奈川県	144,935	3,602	8.853	317	603	558
新潟県	52,996	1,044	11.352	28	151	151
富山県	33,326	398	10.949	34	77	62
石川県	32,804	480	13.259	19	61	109
福井県	17,338	300	8.818	25	55	47
山梨県	27,264	328	12.074	17	53	43
長野県	36,936	792	14.911	26	176	109
岐阜県	52,161	717	11.506	94	174	118
静岡県	63,137	1,435	13.450	109	308	202
愛知県	166,790	2,627	18.325	247	554	441
三重県	54,774	785	11.250	30	147	184
滋賀県	31,075	470	9.042	29	79	82
京都府	70,102	1,174	6.997	28	71	242
大阪府	223,737	4,306	5.629	238	415	802
兵庫県	109,456	2,636	7.044	176	350	554
奈良県	43,872	538	7.563	34	79	83
和歌山県	25,565	453	7.443	9	65	74
鳥取県	16,640	235	8.419	10	33	38
島根県	22,946	259	7.739	3	46	51
岡山県	34,679	698	11.901	63	118	118
広島県	69,489	1,193	6.735	27	159	318
山口県	31,019	649	8.821	24	107	155
徳島県	21,959	306	8.254	13	47	56
香川県	29,688	394	10.219	6	73	70
愛媛県	33,367	639	7.042	18	86	142
高知県	29,852	330	12.431	1	47	77
福岡県	128,690	2,121	7.711	114	264	361
佐賀県	21,323	273	9.850	10	48	38
長崎県	43,602	595	10.066	23	69	106
熊本県	34,703	676	13.173	14	86	120
大分県	33,070	497	7.766	13	74	94
宮崎県	20,415	454	9.093	8	69	103
鹿児島県	35,595	682	10.188	10	82	181
沖縄県	28,117	488	7.861	4	54	100
平均	62,406	1,103	9.664	60	175	212